ВОЛНЫ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Шахин В.М., Шахина Т.В.

Учреждение Российской академии наук Государственный южный научно-исследовательский полигон РАН

E-mail: tvsha@yandex.ru

По проблеме поверхностных волн опубликовано большое количество работ и получены весьма значимые результаты [1] – [7]. Однако, если говорить о нелинейной задаче, остается невыясненным ряд фундаментальных вопросов [8]. Более того, нельзя не отметить имеющиеся противоречия в решениях различных авторов полученных в рамках одних и тех же моделей [5], [7]. Поэтому задача остается актуальной, а существующие представления о волнах большой амплитуды требуют определенного пересмотра.

Рассматривается плоская задача об установившихся прогрессивных волнах конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости.

Пусть x- горизонтальная координата, которая совпадает с линией невозмущенной свободной поверхности и направлена по движению волны; z - направленная вверх вертикальная координата; d = const - глубина жидкости. Если предположить, что система координат движется в направлении распространения волны с фазовой скоростью c, то профиль волны относительно подвижной системы отсчета будет неизменным во времени, т.е. течение можно рассматривать как установившееся. Поскольку движение безвихревое, то в области ограниченной дном и свободной поверхностью существуют потенциал скорости $\varphi(x,z)$ и функция тока $\psi(x,z)$.

Введем безразмерные величины

$$x^* = mx, \qquad z^* = mz, \qquad d^* = md, \qquad \varphi^* = \frac{m}{c}\varphi,$$

$$\psi^* = \frac{m}{c}\psi, \quad \eta^* = m\eta, \quad b^* = \frac{b}{c^2},$$

где $m=2\pi/\lambda$ волновое число; λ – длина волны; b – постоянная Бернулли.

В безразмерных переменных уравнение Лапласа для φ и граничные условия можно записать следующим образом (ниже индекс " * " опущен)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \ , \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = -d \ , \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad \text{при } z = \eta \ , \tag{3}$$

$$\frac{g}{c^2 m}\eta + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] = b \qquad \text{при } z = \eta \ , \tag{4}$$

где $\eta(x)$ – профиль свободной поверхности.

Функция тока ψ с потенциалом скорости φ связана условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{5}$$

Предположим, что $\varepsilon = ma$ - малая величина (a – характерная амплитуда колебаний свободной поверхности) и что решение может быть представлено в виде ряда по степеням ε. Предположим также, что уровень жидкости при волнении совпадает с уровнем в спокойном состоянии.

С точностью второго приближения аналитические зависимости для потенциала скорости, функции тока и профиля волны получены ранее [9].

Решение задачи (1) – (5) с точностью третьего приближения можно записать в виде

$$\varphi = -x + \varepsilon \frac{ch(d+z)}{shd}\sin x + \frac{3}{8}\varepsilon^2 \frac{ch2(d+z)}{sh^4 d}\sin 2x - \varepsilon^2 \frac{chd}{shd}\frac{x}{2d} + \varepsilon^3 \frac{(13-4ch^2 d)\, ch3(d+z)}{64\, sh^7 d}\cdot \sin 3x, \tag{6}$$

$$\psi = -z + \varepsilon \frac{sh(d+z)}{shd}\cos x + \frac{3}{8}\varepsilon^2 \frac{sh2(d+z)}{sh^4 d}\cos 2x - \varepsilon^2 \frac{chd}{shd}\frac{(d+z)}{2d} + \varepsilon^3 \frac{(13-4ch^2 d)\, sh3(d+z)}{64\, sh^7 d}\cos 3x, \tag{7}$$

$$\eta = \varepsilon \cos x + \frac{\varepsilon^2}{4}\frac{chd(1+2ch^2 d)}{sh^3 d}\cos 2x + \varepsilon^3 \frac{1}{64 sh^6 d}\cdot \left[8ch^2 d(5ch^4 d - 4ch^2 d - 1)\cos x + 3(1+8ch^6 d)\cos 3x\right] - \varepsilon^3 \frac{1}{2d}\frac{chd}{shd}\cos x, \tag{8}$$

$$b = \frac{1}{2} + \varepsilon^2 \frac{sh2d + d}{4d\cdot sh^2 d}. \tag{9}$$

$$c = \sqrt{\frac{g}{m}\frac{shd}{chd}}\cdot\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{8ch^4 d - 8ch^2 d + 9}{8sh^4 d} - \frac{1}{d}\frac{chd}{shd}\right)\right]. \tag{10}$$

Высота волны h, определяемая как разность уровней свободной поверхности при $x = 0$ и $x = \pi$, будет равна

$$h = 2\varepsilon + \varepsilon^3 \frac{\left[8ch^2 d(5ch^4 d - 4ch^2 d - 1) + 3(1+8ch^6 d)\right]}{32\, sh^6 d} - \varepsilon^3 \frac{1}{d}\frac{chd}{shd}. \tag{11}$$

В размерных переменных и неподвижной системе координат профиль волны и компоненты скорости выражаются зависимостями

$$\eta = a\cos(kt - mx) + \frac{ma^2}{4}\frac{cthmd(1+2ch^2 md)}{sh^2 md}\cdot\cos 2(kt-mx) + \frac{m^2 a^3}{64}\cdot \frac{[8ch^2 md(5ch^4 md - 4ch^2 md - 1)\cos(kt-mx) + 3(1+8ch^6 md)\cos 3(kt-mx)]}{sh^6 md} - , \quad - \frac{m^2 a^3}{2d}\frac{chmd}{shmd}\cos(kt-mx) \tag{12}$$

$$u = ak\frac{chm(d+z)}{shmd}\cos(kt-mx)+\frac{3}{4}a^2km\frac{ch2m(d+z)}{sh^4md}\cos 2(kt-mx)-\frac{a^2k}{2d}\frac{chmd}{shmd}+$$
$$+\frac{3}{64}a^3km^2\frac{(13-4ch^2md)ch3m(d+z)}{sh^7md}\cdot\cos 3(kt-mx)\ , \qquad (13)$$

$$w = -ak\frac{shm(d+z)}{shmd}\sin(kt-mx)-\frac{3}{4}a^2km\frac{sh2m(d+z)}{sh^4md}\sin 2(kt-mx)-$$
$$-\frac{3}{64}a^3km^2\cdot\frac{(13-4ch^2md)sh3(d+z)}{sh^7md}\sin 3(kt-mx)\ . \qquad (14)$$

Теоретические данные достаточно хорошо согласуются с экспериментальными (рис. 1).

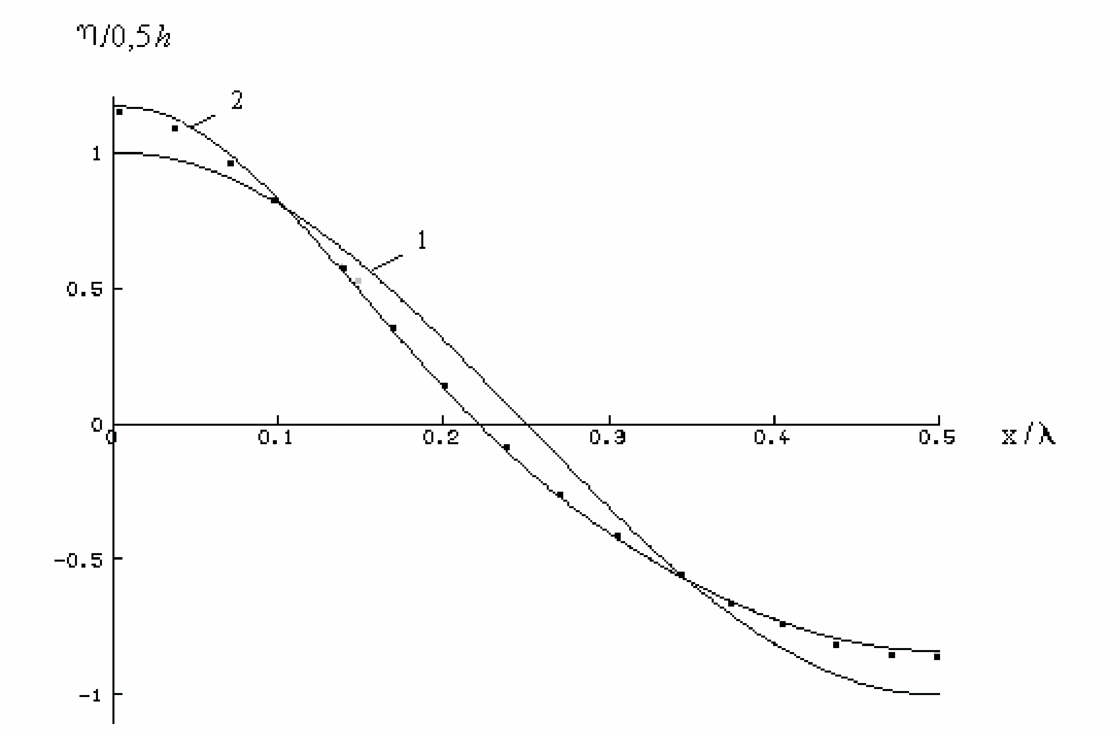

Рис. 1. Профиль волны (d = 0,54 м; h = 0,20 м; λ = 2,3 м). 1 – по линейной теории; 2 – по зависимости (12); ■ - эксперимент [10].

Таким образом, найдено новое более полное решение задачи для прогрессивных волн большой амплитуды.

Литература

1. Ламб Г. Гидродинамика. Пер. с англ. //М.-Л.:ОГИЗ, 1947. - 928 с.
2. Шулейкин В.В. Физика моря. // М.: Наука, 1968. - 1083 с.
3. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. // Изд.2-ое М.:Наука, 1977. – 816 с.
4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны Пер. с англ.//М.: Мир, 1977. - 622 с.
5. Fenton J.D. A fifth-order stokes theory for steady waves. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng. V.111, №2, 1985, p.216-234.
6. Шварц Л., Фентон Дж. Сильно нелинейные волны. В сб.: Нелинейные волновые процессы. Пер. с англ. //М.: Мир, 1987, №42, с. 10-36.
7. Алешков Ю.З. Течение и волны в океане. //СПб.: Издательство С. - Петербургского университета, 1996. - 228 с.

8. Овсянников Л.В. Параметры кноидальных волн. –В кн.: Проблемы математики и механики. Новосибирск: Наука, 1983, с. 150 – 166.
9. Шахин В.М. Прогрессивные волны конечной амплитуды. Изв. АН. Физика атмосферы и океана, 2001, т.37, № 2, с. 245-248.
10. Лаппо Д.Д., Стрекалов С.С., Завьялов В.К. Нагрузки и воздействия ветровых волн на гидротехнические сооружения. Теория. Инженерные методы. Расчеты.// Л.: ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 1990. –432 с.